ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Option M

DURÉE : 4 heures

Dans les deux problèmes $\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels.

PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien.

Un système de coordonnées cylindriques d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un triplet (r, θ, z) tel que :

$$x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta).$$

On fixe une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ et on note S la surface d'équation cylindrique $z = f(\theta)$.

1. Montrer que S est engendrée par une famille de droites rencontrant l'axe des z et parallèles au plan xOy. Une droite de cette famille sera appelée une génératrice de S.

2. On suppose dans cette question que la dérivée de la fonction f ne s'annule pas. Soit g une application de classe C^∞ définie sur un intervalle I et à valeurs réelles. On associe à g la courbe Γ tracée sur S définie en coordonnées cylindriques par :

$$r = g(\theta), \quad z = f(\theta) \quad (\theta \in I).$$

Déterminer g pour que, en tout point de Γ, le plan osculateur à Γ soit tangent à S.

3. Dans cette question $f(\theta) = \cos(2\theta)$.

Étudier et construire la courbe intersection de S et du plan d'équation $x = a$ (a réel strictement positif donné).

Déterminer les coordonnées des points d'inflexion éventuels de cette courbe.

Soit P un plan qui contient une génératrice de S et qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire au plan xOy.

Montrer que la projection orthogonale sur xOy de l'intersection de S et de P est réunion d'une droite et d'une autre courbe dont on précisera la nature géométrique.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul, E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ et f est un endomorphisme de E.

On dit que l'endomorphisme f est semi-simple si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire (dans E) stable par f.

Tous les polynômes et toutes les matrices considérés sont à coefficients réels.

Un polynôme P est dit simple s'il peut s'écrire sous la forme :

$$P = Q_1 Q_2 \ldots Q_p$$

où $p > 0$ et les Q_i sont p polynômes irréductibles deux à deux premiers entre eux (chaque Q_i est donc de degré 1 ou 2).

Une matrice carrée (n, n) A à coefficients réels est dite semi-diagonale si elle est de la forme diagonale par blocs suivante :

$$A = \begin{bmatrix} D & & & \\ & A_1 & & (0) \\ & & A_2 & \\ & (0) & & \ddots \\ & & & & A_k \end{bmatrix}$$

où D est une matrice diagonale (p, p) et, pour $i = 1, \ldots, k$, A_i est une matrice (2,2) de la forme :

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{bmatrix} \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

p et k sont donc des entiers (p ou k peut être nul) tels que $p + 2k = n$.

Les parties **B** *et* **C** *sont indépendantes.*

A

1. Montrer l'existence d'un polynôme irréductible Q tel que le noyau de Q (f) ne soit pas réduit à $\{0\}$.

2. En déduire qu'il existe un sous-espace de E de dimension 1 ou 2 stable par f.

B

On se propose de montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(1) f est semi-simple.

(2) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est semi-diagonale.

(3) Il existe un polynôme simple P tel que P (f) est nul.

3. On suppose dans cette question que la propriété (1) est vérifiée.
Montrer la propriété (2) dans le cas $n = 2$.
Dans le cas général, montrer que, pour tout sous-espace F de E stable par f, l'endomorphisme de F induit par f est semi-simple.
Montrer la propriété (2).

4. Montrer que (2) implique (3).

5. On suppose (3).
Soit F un sous-espace de E stable par f et différent de E.

Montrer l'existence d'un vecteur x n'appartenant pas à F et d'un polynôme irréductible $Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(Q(f))(x) = 0$.

Montrer qu'alors le sous-espace G de E engendré par $\{x, f(x)\}$ est stable par f et que la somme F + G est directe.

Montrer (1).

6.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Trouver une matrice inversible P et une matrice semi-diagonale B telles que :

$$P^{-1}AP = B.$$

C

Dans cette partie, on suppose que l'espace E est euclidien.

7. Montrer que s'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de f est semi-diagonale, alors :

$$f^* \circ f = f \circ f^*, \quad f^* \text{ désignant l'endomorphisme adjoint de } f.$$

8. On se propose dans cette question d'établir la réciproque de la question 7. On suppose donc que f commute avec son adjoint.

Montrer que si M est une matrice réelle (non nécessairement carrée) telle que la trace de la matrice ${}^tMM$ soit nulle (${}^tM$ désigne la matrice transposée de M) alors M est nulle.

En déduire que si F est un sous-espace de E stable par f alors l'orthogonal de F est aussi stable par f.

Conclure (on sera amené à chercher les matrices (2, 2) qui commutent avec leur transposée).

9. Que déduit-on du résultat précédent dans chacun des cas suivants ?

a. f est un automorphisme orthogonal ;

b. f est symétrique ;

c. f est antisymétrique ($f^* = -f$).

10.

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 26 & -26 & 22 \\ 22 & 23 & -16 \\ -26 & 8 & 23 \end{bmatrix}$.

On admettra que $A\,{}^tA = {}^tA\,A$ et que 18 est la seule valeur propre réelle de A.

Trouver une matrice orthogonale P telle que :

$P^{-1}AP$ soit semi-diagonale.